1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) το μέγιστο στοιχείο, το ελάχιστο σημείο, το supremum και το infimum καθενός από τα παρακάτω σύνολα.
$A = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : \ (x^2+2)^2 \leq 4\}$,
$\Gamma = \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
$\Delta = \{x \in \mathbb{R} : 3x+1 < 8\}$.

2. Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $L \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.
(i) $\inf A = L$.
(ii) α) Ο αριθμός L είναι κάτω φράγμα του A. β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $x < L + \varepsilon$.

3. Έστω A ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\inf A \leq \sup A$. Τι συμπεραίνετε στην περίπτωση που $\sup A = \inf A$;

4. Έστω A, B δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $x < y$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$. Να δείξετε (χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα) ότι δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\sup A < \inf B$.

5. Να δείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4}$.

6. Να αναπτυχθεί, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα, η παράσταση $(x-2)^6$.

7. Δίνεται $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σύνολο $A = \{q \in \mathbb{Q} : \ q < \lambda\}$. Δείξτε ότι $\sup A = \lambda$.

8. Έστω A, B δυο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $\Gamma = \{a + \beta : \ a \in A, \ \beta \in B\}$. Δείξτε ότι $\sup \Gamma = \sup A + \sup B$ και $\inf \Gamma = \inf A + \inf B$.

9. Δίνεται ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\sup A - \inf A = 2$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x, y \in A$ με $x - y > 2 - \varepsilon$.

12/10/2016

$(a+\beta)^0 = 1$

$(a+\beta)^1 = 1a + 1\beta$

$(a+\beta)^2 = 1a^2 + 2a\beta + 1\beta^2$

$(a+\beta)^3 = 1a^3 + 3a^2 \cdot \beta + 3a\beta^2 + 1\beta^3$

$(a+\beta)^4 = 1a^4 + 4a^3\beta + 6a^2\beta^2 + 4a\beta^3 + 1\beta^4$

Τριγωνο του Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Αν $1 \le k \le n$ τότε

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Απόδειξη

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\ (n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!\ k}{(k-1)!\,k\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!\,k}{k!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{k!((n+1)-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Διωνυμικό ανάπτυγμα (ή διώνυμο του Νεύτωνα).

$a \neq 0$, $b \neq 0$, $a+b \neq 0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad (1)$$

Απόδειξη Με επαγωγή

Για $n=0$ $(a+b)^0 = 1$ που ισχύει.

Για $n=1$ η (1) γράφεται $(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1$

$\rightarrow a+b = a + b$

που ισχύει

Γενικό επαγωγικό βήμα

Υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει για n δηλ. ότι

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

και θα δ.ο. η (1) ισχύει για $n+1$

δηλ. ότι $$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} \cdot b^k$$

Έχουμε

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \right)(a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} \cdot b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k+1}} + b^{n+1} \quad (*)$$

Θέτοντας $k+1 = m \iff k = m-1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k+1} = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} a^{(n+1)-m} \cdot b^m =$$

$0 \le k \le n-1$

$1 \le \underset{m}{\underset{\parallel}{k+1}} \le n$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k} \cdot b^k$$

βάζοντας στη θέση του m το k.

Συνέχεια (*)

$$= \alpha^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}\alpha^{(\nu+1)-k}\cdot\beta^{k} + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k-1}\alpha^{(\nu+1)-k}\cdot\beta^{k} + \beta^{\nu+1}$$

$$= \alpha^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu}\left(\binom{\nu}{k}+\binom{\nu}{k-1}\right)\alpha^{(\nu+1)-k}\cdot\beta^{k} + \beta^{\nu+1}$$

$$= \binom{\nu+1}{0}\alpha^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu+1}{k}\alpha^{(\nu+1)-k}\cdot\beta^{k} + \binom{\nu+1}{\nu+1}\beta^{\nu+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu+1}\binom{\nu+1}{k}\alpha^{(\nu+1)-k}\cdot\beta^{k}$$

Η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης.

Εφαρμογές

→ $\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\dots+\binom{\nu}{\nu} = (1+1)^{\nu} = 2^{\nu}$

από το διωνυμικό ανάπτυγμα για $\alpha=1$, $\beta=1$.

→ $\binom{\nu}{0}-\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}-\binom{\nu}{3}+\dots+(-1)^{\nu}\binom{\nu}{\nu} = (1+(-1))^{\nu} = 0^{\nu} = 0$

διωνυμικό ανάπτυγμα.

$$(\alpha+\beta)^7 = \binom{7}{0}\alpha^7 + \binom{7}{1}\alpha^6\cdot\beta + \binom{7}{2}\alpha^5\beta^2 + \binom{7}{3}\alpha^4\beta^3 + \binom{7}{4}\alpha^3\beta^4 +$$

$$+\binom{7}{5}\alpha^2\beta^5 + \binom{7}{6}\alpha\cdot\beta^6 + \binom{7}{7}\beta^7$$

Λήμμα Αν $n \in \mathbb{N}$ και $\beta_1, \dots, \beta_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_n = 1$. Τότε $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \geq n$

Επιπλέον η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν
$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 1$

Απόδειξη

Με επαγωγή

Για $n=1$ $\beta_1 = 1$ και δεν υπάρχει τίποτα να αποδειχθεί

Γενικό επαγωγικό βήμα

Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για n αριθμούς και θα το δείξουμε για $n+1$ αριθμούς.

Έστω $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}$ θετ. πραγμ. αριθμοί με
$\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n \cdot \beta_{n+1} = 1$

Αν $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta_{n+1} = 1$ τότε $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + \beta_{n+1} = n+1$

Σε αντίθετη περίπτωση υπάρχουν $k, l \in \{1, \dots, n+1\}$ με
$0 < \beta_k < 1$, $\beta_l > 1$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 < \beta_1 < 1$ και $\beta_{n+1} > 1$.

Τότε $\left.\begin{array}{l} 1 - \beta_1 > 0 \\ \beta_{n+1} - 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1 - \beta_1)(\beta_{n+1} - 1) > 0$

$\Rightarrow \beta_{n+1} - 1 - \beta_1 \beta_{n+1} + \beta_1 > 0$

$\Rightarrow \beta_1 + \beta_{n+1} > 1 + \beta_1 \beta_{n+1}$ (3)

Εφόσον $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_n \beta_{n+1} = 1$

$\Rightarrow (\beta_1 \beta_{n+1}) \beta_2 \cdots \beta_n = 1$

Από την επαγωγική υπόθεση (για ν-αριθμούς) προκύπτει
$\beta_1 \cdot \beta_{\nu+1} + \beta_2 + \dots + \beta_\nu \geq \nu$ (4).

Συνεπώς
$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu + \beta_{\nu+1} = (\beta_1 + \beta_{\nu+1}) + \beta_2 + \dots + \beta_\nu$

$\underset{(3)}{>} 1 + \beta_1 \beta_{\nu+1} + \beta_2 + \dots + \beta_\nu \underset{(4)}{\geq} 1 + \nu = \nu + 1.$

Πρόταση
Αν $x_1, \dots, x_\nu$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\underbrace{\frac{\nu}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_\nu}}}_{\text{αρμονικός μέσος}} \leq \underbrace{\sqrt[\nu]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_\nu}}_{\text{γεωμετρικός μέσος}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_\nu}{\nu}}_{\text{αριθμητικός μέσος}}$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = \dots = x_\nu$.

Απόδειξη

Θέτουμε $\beta_1 = \frac{x_1}{\sqrt[\nu]{x_1 \cdots x_\nu}}$, $\beta_2 = \frac{x_2}{\sqrt[\nu]{x_1 \cdots x_\nu}}$, ..., $\beta_\nu = \frac{x_\nu}{\sqrt[\nu]{x_1 \cdots x_\nu}}$

Παρατηρούμε ότι β_i θετικό
$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_\nu = 1$.

Από το λήμμα $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu \geq \nu$

$$\frac{x_1}{\sqrt[\nu]{x_1 \cdots x_\nu}} + \frac{x_2}{\sqrt[\nu]{x_1 \cdots x_\nu}} + \dots + \frac{x_\nu}{\sqrt[\nu]{x_1 \cdots x_\nu}} \geq \nu.$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + \dots + x_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{x_1 \cdots x_\nu}.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $b_1 = \dots = b_n = 1$.
$\iff x_1 = \dots = x_n$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα αριθμ - γεωμ. μέσου (που μόλις αποδείξαμε) για τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n} \implies \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

για $n=1$.

Συνέπειες

Για $n=2$

1) Από τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό μικρότερη περίμετρο έχει το τετράγωνο

2) (Επαναδιατύπωση)
Από τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο

Για $n=3$

3) Από τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με σταθερό όγκο μικρότερο άθροισμα μηκών ακμών έχει ο κύβος

4) Από τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με σταθερό άθροισμα μηκών ακμών μεγαλύτερο όγκο έχει ο κύβος

Εναλλακτικές μορφές επαγωγής

Πρ. Αν $k \in \mathbb{N}$ και $P(n)$ μια πρόταση που αφορά φυσικούς αριθμούς (ενδεχομένως μόνο για $n \geq k$)
ώστε (i) η $P(k)$ ισχύει
(ii) Για κάθε $n \geq k$ αν η $P(n)$ ισχύει τότε ισχύει η $P(n+1)$

Τότε η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \geq k$

Πρ. Έστω $P(n)$ μια πρόταση που αφορά φυσικούς αριθμούς
ώστε
(i) Η $P(1)$ ισχύει
(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$
Αν οι $P(k)$ $1 \leq k \leq n$ ισχύουν
τότε ισχύει η $P(n+1)$

Τότε η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Πρόταση (Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών)

→ Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

$\Updownarrow$

(Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n > x$)

Απόδειξη

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Από το αξίωμα της πληρότητας το $\mathbb{N}$ έχει supremum θέτουμε $a = \sup \mathbb{N}$

Εφόσον $a-1 < a = \sup \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$
με $a-1 < n$
$\Rightarrow a < n+1$

Εφόσον $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $n+1 \in \mathbb{N}$ άτοπο.
(εφόσον $a = \sup \mathbb{N}$ άρα a άνω φράγμα του $\mathbb{N}$)

(Ισοδύναμη διατύπωση
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$)

Σύνολο ακεραίων

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-x,\ x \in \mathbb{N}\}$$
$$= \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}\ \ -x \in \mathbb{N}\}$$

Σύνολο των ρητών αριθμών

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z}\ \ n \neq 0\}$$

<u>Θεώρημα</u>

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος k ώστε $k \leq x < k+1$. Το k αυτό λέγεται ακέραιο μέρος του x και συμβολίζεται με $[x]$

$[4] = 4$
$[-5] = -5$
$[6,7] = 6$
$[-6,7] = -7$

Θεώρημα (Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς).

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$.

Θεώρημα
Έστω $x > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός y ώστε $y^n = x$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $A = \{t \in \mathbb{R} \; t > 0 \; t^n < x\}$
Αποδεικνύεται ότι το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο άρα από το αξίωμα της πληρότητας το A έχει supremum Θέτουμε $y = \sup A$

Αποκλείοντας τις περιπτώσεις $y^n < x$, $y^n > x$ συμπεραίνουμε ότι $y^n = x$

Ορισμός - Συμβολισμός

Τον μοναδικό y για τον οποίο $y^{n}=x$ τον συμβολίζουμε με $\sqrt[n]{x}$ και ονομάζεται n-οστή ρίζα του x

$\sqrt[n]{0}=0$

$\sqrt[2]{x}=x$

Θεώρημα Δεν υπάρχει ρητός αριθμός q ώστε $q^2=2$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $q=\frac{m}{n}$ $m,n\in\mathbb{N}$ ώστε $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$.

Υποθέτουμε ότι το κλάσμα $\frac{m}{n}$ είναι ανάγωγο (αν δεν ήταν το απλοποιούμε)

$\Rightarrow m^2=2n^2 \Rightarrow m^2$ άρτιος.

Άρα ο m είναι άρτιος (αν ο m ήταν περιττός τότε το m^2 θα ήταν περιττός) άτοπο

$\exists\ k\in\mathbb{N}$ $m=2k$

$\shortparallel$

$(2k)^2=2n^2$

όπως πριν

$\Rightarrow n^2=2k^2 \Rightarrow n^2$ άρτιος $\Rightarrow \boxed{n \text{ άρτιος}}$

άτοπο διότι το $\frac{m}{n}$ το υποθέσαμε ανάγωγο

Επομένως δεν υπάρχει ρητός q ώστε $q^2=2$

Εφόσον υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x^2 = 2$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί

$$\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$$

Τους πραγματικούς αριθμούς που δεν είναι ρητοί τους καλούμε άρρητους

$\boxed{\mathbb{R} - \mathbb{Q}}$ το σύνολο των αρρήτων

Παρατήρηση

α) Το άθροισμα δυο ρητών είναι ρητός $\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl}$

β) Το γινόμενο δυο ρητών είναι ρητός $\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{n \cdot l}$

Θεώρημα (πυκνότητα των αρρήτων στους πραγματικούς)

Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ με $a < x < b$

Απόδειξη

Εστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$

τότε $a + \sqrt{2} < b + \sqrt{2}$

Απο την πυκνότητα των ρητών υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$

$a + \sqrt{2} < q < b + \sqrt{2}$

$\Rightarrow a < q - \sqrt{2} < b$

Ο $q - \sqrt{2}$ είναι άρρητος. Πράγματι αν $q - \sqrt{2} = \rho \in \mathbb{Q}$ τότε $\sqrt{2} = q - \rho$ ρητός ως διαφορά δυο ρητών άτοπο

Ορισμός δυνάμεων

Έστω $a>0$

Θέλουμε να ορίσουμε a^x $\forall x\in\mathbb{R}$

και να ισχύει $\boxed{a^{x+y}=a^x\cdot a^y \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}}$ (*).

→ Για $x\in\mathbb{N}$ έχει ήδη οριστεί (αναδρομικά)
(και η (*) αποδεικνύεται για $x,y\in\mathbb{N}$ με επαγωγή)

→ $a^0=1$

→ $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

→ $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Παρατήρηση

αν $\frac{k}{\ell}=\frac{m}{n}$ $\ell,n\in\mathbb{N}$ $k,m\in\mathbb{Z}$

$\sqrt[\ell]{a^k}=\sqrt[n]{a^m}$

Ορισμός του a^x για $x\in\mathbb{Q}$

αν $x=\frac{m}{n}$ $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$